

Une méthode de gradient réduit à base variable utilisant des informations du second ordre appliquée aux problèmes du Load Flows sous contraintes et optimisé

Etienne Jamouille et Gauthier Dupont

**Systems - Europe S.A
Boulevard de l'Humanité N° 415
Bruxelles, Belgique**

Introduction

L'analyse de l'écoulement des charges dans un réseau électrique est un élément essentiel de l'étude de l'expansion ou de la planification des opérations d'un système de transmission ou de distribution.

Ceci explique la nombreuse littérature consacrée à ce sujet et relatant depuis le début de l'ère des ordinateurs, l'évolution de la question des points de vue mathématique et informatique. De ces points de vue on peut décomposer l'analyse de l'écoulement des charges en trois sous-problèmes de complexité croissante:

- La recherche de la solution du système d'équations non-linéaires réglant les écoulements de charges dans un réseau. (Problème du Load Flows ou LF)
- La recherche d'une solution, si elle existe, au problème du Load Flows, compte tenu de bornes supérieures et inférieures ou de relations supplémentaires imposées à ou entre certaines variables du système d'équations. (Problème du Load Flows sous Contraintes ou CLF)
- La recherche de l'extremum d'une fonction objectif donnée, pour toutes les solutions possibles du problème CLF. (Problème de l'Optimum Load Flows ou OPF)

On peut considérer que le problème LF fut résolu au cours des années 60, dès que la performance des ordinateurs de l'époque jointe à un perfectionnement des techniques numériques d'algèbre linéaire, permirent la factorisation de matrices creuses de grande dimension.

Ceci rendit possible la factorisation du Jacobien d'un réseau de plusieurs centaines de nœuds et donc l'utilisation de la méthode de Newton. Les Ref(1) et (2) sont justement considérées par les électriciens comme les papiers fondateurs en Europe et aux USA de cette technique dans leur domaine.

Les deux autres problèmes du CLF et OPF ressortent tous les deux des mêmes techniques mathématiques de la programmation non linéaire. Leur historique est dès lors commun.

La première génération de programmes visant à résoudre opérationnellement le problème OPF apparut en fin des années 60. La plupart de ces programmes utilisaient une méthode de gradient, c.a.d., calculaient les dérivées totales premières de la fonction de coût par rapport aux variables indépendantes du problème. Ces dérivées ou vecteur gradient fournissent la direction de déplacement à appliquer à la solution courante pour l'améliorer. La procédure est itérative et s'arrête à l'obtention d'un vecteur gradient suffisamment petit.

Dès l'origine, l'application de la méthode du gradient suivit deux filières distinctes. Le papier fondateur de la première filière qui se caractérise par l'utilisation de "facteurs de pénalités" dans la fonction économique est repris en Ref (3). Cette filière est basée sur une séparation fixe des variables du problème en variables dépendantes et indépendantes. Cette séparation fixe conduit nécessairement à un traitement différent des variables bornées suivant que ces bornes portent sur les variables indépendantes ou sur les variables dépendantes. Il est en effet facile de ne choisir pour les variables indépendantes que des déplacements respectant leurs bornes. Par contre, le contrôle des variables dépendantes n'est possible que de façon indirecte. Ce contrôle est assuré par l'insertion dans la fonction de coût de termes de pénalités correspondant aux dépassements éventuels des variables dépendantes multipliés par un jeu de "facteurs de pénalités". La connaissance préalable des contraintes actives et le choix des facteurs de pénalités sont deux difficultés reconnues de cette approche.

La deuxième filière connue dans la littérature sous le vocable GRG pour "Gradient Réduit Généralisé" fut présentée dès 1969 en Ref (4). Cette méthode est une généralisation à un système de contraintes non linéaires de la méthode du gradient réduit de Wolfe. Exactement comme dans la première filière, la méthode GRG modifie en fonction du gradient réduit la solution courante de façon à satisfaire les critères d'optimalité. Par contre l'approche GRG, issue de l'analyse et techniques de résolution de la Programmation Linéaire (PL), utilise les très utiles notions empruntées à la PL.

A savoir:

- Le jeu de variables dépendantes considéré comme une "base" au sens de la PL du système d'équation linéarisé autour du point courant.
- La notion de base courante du système et la nécessité de changement de cette base lorsqu'une variable dépendante atteint une de ses limites ou en d'autres mots, devient active.

On peut citer les Ref (5) et (6) comme ayant les premières, montré l'intérêt de cette approche ainsi que son efficacité opérationnelle.

La Ref (5) applique le GRG au problème particulier du "dispatching économique" dans lequel les contraintes de sécurité du type (n-1) sont explicitement introduites, tandis que la Ref (6) l'applique au problème de l'OPF proprement dit.

A remarquer aussi vers la même époque la Ref (7) dans laquelle est proposée une méthode de gradient réduit à base variable présentant de grandes similitudes avec celle du GRG. De plus, dans cette référence on trouve aussi la formulation du problème CLF ou de la recherche d'une première solution réalisable, préalable nécessaire à l'OPF. La technique de résolution proposée pour le problème CLF est l'algorithme dual du simplexe de Wagner, cheminant dans le domaine des solutions irréalisables.

A première vue, la filière GRG unifiant la manière de traiter les contraintes, semble présenter un avantage certain sur la méthode de la base fixe jointe à l'adjonction de facteurs de pénalité. Cependant il faut bien noter que l'une et l'autre des deux filières utilisent le gradient réduit comme direction de déplacement. Hors, celui-ci se calcule à partir des seules dérivées

premières de la fonction économique et des contraintes. De ce fait, les deux filières souffraient initialement toutes les deux, de deux inconvénients importants:

- une convergence souvent lente et avançant très souvent en zigzag du fait d'une direction de la recherche fournie par un gradient, dépendant par nature de l'échelle choisie pour les variables.
- une direction donnée au déplacement ne satisfaisant les contraintes qu'au premier ordre. Ceci entraînait la nécessité de limiter l'ampleur des déplacements de façon empirique, afin de s'assurer de ne pas trop sortir du domaine réalisable et donc de pouvoir y rentrer sans trop de problème par la méthode de Newton.

On trouvera en Ref (8) un intéressant exposé de l'état de l'art du problème tel qu'il existait en fin des années 70. Dans cet exposé on voit l'intérêt se déplacer vers l'utilisation d'informations du second ordre correspondantes à la non linéarité de la fonction économique et des contraintes. La non linéarité de la fonction économique est relativement facile à traiter. Déjà la méthode GRG originale en tient compte. Par contre, l'introduction de la non linéarité des contraintes nécessite la factorisation du Hessien de la fonction de coût originale augmentée de termes de pénalités correspondants à ces contraintes.

Les travaux publiés durant les années 1980 et le début des années 1990 suivant cette voie sont nombreux. Pour simplifier, notre analyse ne se voulant pas exhaustive, nous rangerons tous ces travaux dans la classe des améliorations apportées par l'ajout d'informations du second ordre à la filière dite des "facteurs de pénalités" ouverte par la Ref (3).

Trois publications, jalonnant le chemin parcouru nous semblent ici intéressantes à citer.

La Ref (9), la première sur la question ajoute à la fonction objectif des facteurs de pénalités multipliant le carré des erreurs à zéro des contraintes d'égalité et le carré des dépassements des contraintes d'inégalité supposées actives. On recherche ensuite par la version optimisation de la méthode de Newton le minimum de la fonction augmentée. Ceci nécessite le calcul direct de l'inverse du Hessien par élimination gaussienne et l'utilisation des techniques de matrices creuses. Malheureusement cette approche est vite apparue comme très limitée du fait d'un conditionnement de plus en plus défavorable du Hessien avec l'accroissement nécessaire des facteurs de pénalité lorsqu'on se rapproche de l'optimum.

Les Ref (10) et (11) appartiennent toutes deux à la classe des algorithmes basés sur les multiplicateurs de Lagrange. Cette fois, c'est le Lagrangien qui est augmenté des termes de pénalités similaires à ceux de la Ref (9). La sévérité des facteurs de pénalités employés exprime la précision avec laquelle la minimisation du Lagrangien augmenté approxime le problème original. Les deux publications proposent toutes les deux des règles de mise à jour des facteurs de pénalités visant à assurer la convergence de l'algorithme, son efficacité et le traitement correct des contraintes d'inégalité actives à l'optimum.

Finalement, il faut noter comme derniers développements de la filière faisant appel à des termes de pénalités, l'application très à la mode actuellement, de la méthode du point intérieur au problème OPF. Cette méthode initialement développée pour résoudre des programmes linéaires, fournira-t-elle un jour une solution au problème de OPF meilleure que celles déjà disponibles? La chose n'est pas certaine.

Ceci étant dit sur la première filière que nous pourrions appeler " Base fixe et facteurs de pénalité", il faut bien remarquer que la seconde filière GRG ou base variable, malgré son avantage apparent de pouvoir traiter directement tous types de contraintes actives ou non, n'a donné lieu à nouvelle publication faisant état d'améliorations qu'à l'Electricité De France (EDF) et par son principal auteur. On trouvera ainsi décrit en Ref (12) l'état, fin des années 1980 de la méthode dite des "injections différentielles" telle qu'elle était appliquée avec succès au problème du dispatching économique avec contraintes de sécurité explicites.

Dans le monde anglo-saxon, à la connaissance de l'auteur, la méthode GRG n'a donné lieu, à aucune publication faisant état de nouveaux développements qui pourraient y avoir été apportés. A noter cependant la Ref (13) que l'on peut considérer comme rentrant partiellement dans cette seconde filière. Cette référence utilise la technique SQP ou " Sequential Quadratic Programming". Elle construit une séquence de sous-problèmes en linéarisant les contraintes au point de fonctionnement et en calculant les déplacements qui minimisent le Lagrangien du sous-problème développé jusqu'au second ordre. Cette linéarisation, plus la notion d'optimisation des déplacements à partir d'une solution courante que l'on trouve dans la méthode SQP, lui donne un air de famille avec la méthode présentée dans ce texte. Cependant, dans la Ref (13) la notion de base variable est totalement absente, ce qui la rend peu apte à traiter les contraintes d'inégalités à moins, ici aussi, de connaître à l'avance les contraintes actives. Par contre, il est intéressant de noter en Ref (12) que la technique SQP avait déjà été repérée comme un complément intéressant à l'utilisation de la technique GRG.

On pourrait se demander si l'absence relative de travaux spécialement dans le monde anglo-saxon, visant à améliorer la filière GRG ne provient pas du fait qu'y introduire des informations du second ordre semble moins évident que dans la première filière pour laquelle la définition du Lagrangien et de son Hessien offrait une voie d'approche assez classique. C'est justement le but de notre communication de montrer comment au contraire, la filière GRG se prête facilement à ces améliorations et que celles-ci lui assurent une convergence stable et une bonne efficacité dans l'atteinte de la solution.

Dans ce qui suit, nous traitons d'abord du problème CLF, comme étant le plus simple et en plus devant fournir à l'OPF sa solution initiale réalisable. Les étapes principales de l'algorithme sont présentées et commentées. On passe ensuite à l'OPF en suivant la même approche. Pour illustrer les concepts et les performances de la méthode on présente et utilise les résultats d'un cas didactique. On commente enfin l'efficacité de la méthode à traiter le problème tellement important pour l'ingénieur de planification, de la sensibilité de la solution à la variation des paramètres du problème.

Notre but dans ce papier étant de privilégier les aspects opérationnels des matières présentées plutôt que leurs aspects purement mathématiques. Tous les développements mathématiques sont rejetés en annexe.

Les bases mathématiques auxquelles fait appel la méthode sont classiques. On les trouvera dans n'importe quel bon traité d'analyse infinitésimale. En Ref (14) nous citons l'excellent traité qui en Belgique et en France a servi à plusieurs générations d'ingénieurs.

Par ailleurs, nous avons dans la mesure du possible essayé de suivre les concepts et notations plus modernes de programmation non linéaire présentés dans l'excellent traité cité en Ref (15).

Écoulement des charges sous contraintes (CLF)

Le but du CLF est de vérifier l'existence d'un écoulement de charges techniquement satisfaisant, dans un système donné de transmission/génération. Très souvent l'ingénieur de projet est confronté avec ce type de problème, soit qu'en planifiant des nouveaux investissements, il ait à vérifier le réalisme opérationnel de ses décisions de renforcement, soit qu'en planifiant des opérations, il veuille vérifier la consistance des données décrivant les aspects constructifs du système (lignes, transformateurs, etc..) avec certaines valeurs de courant ou de tension mesurées sur le système en fonctionnement.

Soit un réseau de n nœuds. Mathématiquement le problème du CLF revient à vérifier l'existence d'une solution au système (1) de $2n$ équations non linéaires exprimant le bilan actif

et réactif de puissance à chaque nœud du réseau complété par un système (2) de bornes supérieures et inférieures imposées à chaque variable.

$$g(x,u)=0 \quad (1)$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x} \quad (2)$$

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$$

Eventuellement les $2n$ équations peuvent être complétées par " r " relations d'égalité ou d'inégalité existant entre les variables. La prise en compte de contraintes de transit sur les lignes du réseau en est un exemple. Pour la simplicité des notations et sans perte de généralité, dans ce qui suit, on suppose $r=0$.

Les variables du problème sont au nombre de $2n+m$. Elles comportent généralement:

- le module et l'angle de la tension en chaque nœud du réseau
- la génération active et réactive en chaque nœud du réseau
- les rapports de transformation des transformateurs
- éventuellement des variables de contrôle additionnelles correspondant à des équipements du type HVDC

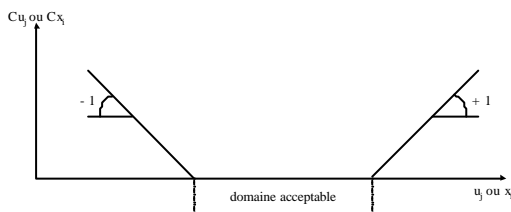


Figure 1 - Coûts de pénalité du CLF

Dans le jeu de variables on distingue m variables de type u ou variables indépendantes et $2n$ variables de type x ou variables dépendantes pouvant être considérées comme fonction implicite des variables u au travers du système (1)

Il est facile de transformer ce problème d'existence en un problème d'optimisation non linéaire en définissant une fonction objectif du type

$Z = \sum c_i u_i + \sum c_j x_j = f(x,u)$ pénalisant les variables ne respectant pas leurs bornes. Dans notre cas, ces coûts de pénalité sont choisis linéaires en fonction des dépassements (voir figure 1) et une solution est obtenue si la valeur de Z peut être amenée à 0.

L'algorithme de base est présenté en figure 2. Nous en commentons brièvement les étapes ci-dessous.

Etape 1 Initialisation

L'initialisation porte sur le choix des $2n$ variables dépendantes (x). Le Jacobien de ces variables dans le système $g(x,u)=0$ doit impérativement être inversible. Dans le cas des équations d'écoulement de charge, il est facile d'atteindre ce résultat. Il suffit en chaque nœud du réseau, de choisir comme variables dépendantes 2 des 4 variables normalement attachées à ce nœud, à savoir pour la première variable dépendante, soit la génération active soit l'angle de tension et pour la seconde soit la génération réactive soit la tension. De toute façon au moins une variable génération active et une réactive doit faire partie du jeu de variables dépendantes. Ceci garantit normalement un Jacobien ou base initiale du système inversible. Les variables Hors Base ou variables indépendantes (u) découlent de ce choix. La valeur initiale de ces variables est fixée à leur valeur nominale pour les tensions et les rapports de transformations des transformateurs tandis que les générations sont choisies de façon à respecter approximativement les bilans de génération actifs et réactifs globaux du système.

Etape 2 Résolution des équations du LF

Cette étape hérite de l'étape N°1 ou de l'étape N°6 un jeu de variables indépendantes et leurs valeurs. On construit la base courante et par la méthode de Newton on résout le système d'équations (1). On définit ainsi une solution courante (x_c, u_c).

Etape 3 Calcul du gradient réduit

On vérifie d'abord si, pour la solution courante la fonction objectif Z est nulle. Dans ce cas, le problème est résolu et une condition de sortie du CLF est atteinte.

Si, par contre $Z \neq 0$, on améliore la solution courante en déplaçant les variables indépendantes dans la direction définie par le vecteur gradient réduit $G = df/du$ (voir appendice 1).

Ce faisant, il faut cependant bien remarquer que cette direction est directement dépendante de l'échelle de mesure utilisée pour chaque composante u_j . Le choix de cette échelle étant arbitraire, la seule information réellement obtenue par le calcul du gradient est l'intérêt de d'augmenter ou de diminuer une variable ou de la bloquer à sa valeur si une borne l'empêche de se déplacer dans la bonne direction.

Pour tenir compte de cette remarque, on introduit un jeu de coefficients p_j définissant pour chaque variable indépendante son facteur d'échelle particulier. En utilisant des informations du second ordre on peut optimiser le choix de ces facteurs d'échelle. Cette optimisation est faite dans le cas de l'OPF et sera présentée à ce moment. Pour le problème plus simple du CLF, l'expérience montre que le système "per unit" normalement utilisé par les électriciens, conduit à des facteurs d'échelle naturels qui se révèlent suffisants. Pour le CLF tous les p_j sont donc choisis égaux à l'unité.

Les déplacements des variables indépendantes s'écrivent alors:

$$du_j = -G_j \cdot p_j \quad \text{si la variable est libre de varier}$$

$$du_j = 0 \quad \text{si la variable est bloquée par une limite dans le sens du déplacement}$$

Si, $Z \neq 0$ et tous les du_j sont égaux à zéro ou sont inférieurs en valeur absolue à un scalaire $\epsilon \geq 0$ arbitraire mais petit, on déclare le CLF sans solution. Les conditions de sortie du programme sont remplies et l'opérateur par l'analyse des contraintes violées ou bloquantes peut étudier la cause de l'absence de solution et y remédier.

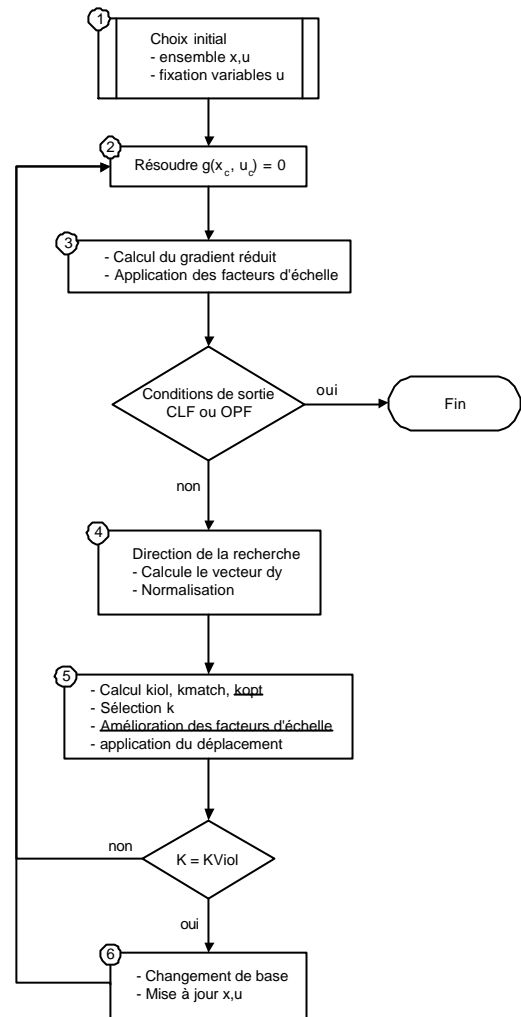


Figure 2 - Algorithme CLF et OPF
(étapes soulignées, utilisées uniquement pour l'OPF)

Etape 4 Direction de la recherche dans l'espace des variations réalisables

Le choix des du_j étant fait, on calcule les variations correspondantes des variables dépendantes de façon que la différentielle totale première du système $dg=0$ reste vérifiée. (voir appendice 1)

Ceci permet la définition du vecteur $dy = k \begin{pmatrix} du \\ dx \end{pmatrix}$ qui caractérise la direction de la recherche

et par le scalaire $k \geq 0$, l'ampleur du déplacement. Du fait de l'introduction du facteur k , les composantes du vecteur dy deviennent normalisables ce qui du point de vue du calcul numérique est très important.

Le facteur k sera choisi à l'étape suivante en tenant compte de la normalisation.

Etape 5 Calcul de k_{viol} et k_{match} , choix du facteur k

Il existe deux sources de limitations à la valeur de k ; la première vient des contraintes d'inégalité et s'exprime dans l'algorithme par la règle suivante:

"Aucun déplacement ne peut faire dépasser à une variable sa plus prochaine limite rencontrée dans le sens du déplacement". De toute façon, ces points limites sont des discontinuités où le gradient à droite ou à gauche doit être recalculé.

Appliquée à chaque variable de type u ou de type x , cette règle conduit à définir une première valeur maximale de k , appelée " k_{viol} "

Une seconde source de limitation provient de l'approximation linéaire du système (1) faite lors du calcul du vecteur dx en fonction du vecteur du . Cette approximation peut être estimée en étudiant le second terme du développement de Taylor des équations $g = 0$.

On montre ainsi (voir appendice 2) que l'erreur à zéro de l'équation $g_i(x_c, u_c) = 0$

au point (x_c+kdx, u_c+kdu) , soit MM_i peut s'écrire

$$MM_i = \frac{1}{2} k^2 . R_i$$

expression dans laquelle R_i est indépendant de k et peut être estimée par le calcul d'une forme quadratique dans laquelle intervient le Hessien $\nabla^2 g_i$ au point (x_c, u_c) . Comme ce calcul fait analytiquement est long et difficile, il vaut mieux le faire numériquement pour une valeur donnée mais petite de $k=k_{test}$

Pour chaque équation on calcule donc l'erreur au point $(x_c + k_{test}.dx, u_c + k_{test}.du)$ et on en tire le R_i correspondant à cette équation.

Ensuite avec MM_{Max} un paramètre défini par l'utilisateur, correspondant à la valeur maximale acceptable pour l'erreur de bilan aux équations $g=0$, on définit une quantité k_{match} par l'expression

$$k_{match} = \min_i k_{match}_i \text{ tel que } \left\{ \frac{1}{2} * |R_i| * k_{match}_i^2 = MM_{Max} \right\}$$

Et finalement k est choisi tel que $k = \min\{k_{viol}, k_{match}\}$ et le point courant est déplacé de la quantité $k.dy$

Cette étape vérifie d'abord si le déplacement proposé amène une variable basique à une de ses limites. Si ce n'est pas le cas, on retourne à l'étape N° 2 pour calculer par la méthode de Newton la valeur des variables dépendantes correspondant au nouveau point courant. Si par contre une variable basique x_i atteint une de ses limites, $k = k_{viol}$ et un changement de base est nécessaire. Ce changement de base est équivalent à un pivotage simplex de la programmation linéaire.

Le pivot se trouve sur la ligne $s_{i,j} = -\frac{dx_i}{du_j}$ de la matrice de sensibilité et il correspond à la

variable u_j dont le déplacement a été le plus responsable de l'atteinte de sa limite par la variable x_i . La variable u_j va entrer dans la base et la variable x_i va en sortir.

La nouvelle base et les nouvelles valeurs des variables indépendantes sont alors renvoyées à l'étape N° 2.

Convergence et efficacité de l'algorithme

Le CLF utilise une méthode de gradient dans sa version la plus simple communément appelée "steepest descent". Nous exposons ci-après les raisons qui, dans le problème qui nous occupe, assurent l'efficacité de cette approche.

D'abord il est facile de donner à l'algorithme un bon point de départ satisfaisant au moins le système d'équations (1). Pour l'ajustement des bilans actifs, il suffit de vérifier que la somme des puissances actives disponibles est bien supérieure à la somme des charges aux nœuds. Si tel n'est pas le cas, on sait que le problème n'a pas de solution.

L'ajustement des bilans réactifs aux nœuds du réseau peut éventuellement être moins simple car le réseau lui-même est source de puissance réactive. Pour faciliter cet ajustement il est cependant très facile de mettre dans le jeu de variables dépendantes x , les variables de génération réactive à la place des variables tension à tous les nœuds du réseau ou une difficulté pourrait se rencontrer. On améliore ainsi très facilement le plan de tension initial.

Une seconde difficulté potentielle de la méthode "steepest descent" est l'atteinte du minimum de Z quand le problème est sans solution et que le minimum de $Z \neq 0$ est obtenu lors d'un équilibre entre les valeurs de deux variables toutes deux hors de leurs limites. Cependant, dans notre problème, cette difficulté n'est pas rédhibitoire car à ce moment, on sait déjà que le problème n'a pas de solution et on peut en tirer les conséquences. La valeur donnée à ϵ n'est donc pas critique.

Une troisième difficulté potentielle est plus délicate à traiter. Il s'agit de la définition de la grandeur du vecteur de déplacement. Ce vecteur définit une direction qui ne satisfait les contraintes qu'au premier ordre. Hors, il est clair que le système d'équation $g=0$ doit continuer à être satisfait à une tolérance donnée. Cette difficulté est résolue par l'utilisation d'une information du second ordre, qui permet le calcul du k_{match} . Celui-ci remplit parfaitement son rôle de frein lorsqu'il s'avère nécessaire.

Ecoulement de charges optimisé

Par le CLF on dispose d'une solution satisfaisant les contraintes. Par l'OPF on veut obtenir la solution satisfaisant les contraintes et optimisant une fonction objectif donnée linéaire ou quadratique mais qui dépend du but poursuivi par l'ingénieur de projet.

Quelques buts possibles s'énoncent ainsi:

- Minimisation des pertes

- Minimisation du coût de production global
- Analyse à l'optimum des coûts marginaux actif et réactif de l'énergie en chaque nœud
- Allocation optimale du réactif
- Analyse à l'optimum des "penalty facteurs" à attacher aux générateurs
- Intérêt marginal du renforcement d'une liaison

De toute façon quelle que soit la quantité à optimiser, l'OPF présente l'énorme avantage de donner à l'ingénieur de projet, un point de référence solide à partir duquel il peut mener ses investigations sur la sensibilité ou la sécurité de la solution aux divers paramètres du problème.

Du point de vue mathématique l'algorithme de OPF est très semblable à celui du CLF. La fonction objectif est différente et peut même être discontinue dans le cas d'une centrale de production constituée d'unités de caractéristiques différentes. Cependant, ceci n'a aucune influence sur la méthode du gradient qui n'exige que l'existence au point courant d'une dérivée partielle première de la fonction objectif dans la direction du déplacement des variables. Ceci dit, les 6 étapes du CLF se retrouvent à l'identique pour l'OPF, sauf à tenir compte

- d'une restriction supplémentaire sur l'ampleur du déplacement suivant la direction de la recherche. Cette restriction intervient par la définition d'un nouveau coefficient k_{opt} .
- du calcul des facteurs d'échelle p_i améliorés ou quasi optimaux
- de conditions de sortie spécifiques portant sur la valeur des composantes du gradient ou du rapport $\frac{\Delta f}{f}$ entre le gain espéré du prochain déplacement et la valeur actuelle de la fonction de coût (typiquement = 10^{-8})

Nous traiterons en premier lieu du calcul du coefficient k_{opt} qui intervient à l'étape N° 5 après le calcul de k_{viol} et k_{match}

Calcul du déplacement optimal (k_{opt})

k_{opt} tient compte de l'évolution non linéaire des variables dépendantes en fonction des déplacements des variables indépendantes.

Soit le vecteur Δx représentant le déplacement des variables x . La formule de Taylor limitée au second ordre, appliquée à Δx considérée comme une fonction des variables indépendantes du, s'écrit:

$$\Delta x = k dx + \frac{1}{2} k^2 d^2 x$$

expression dans laquelle dx est le vecteur des différentielles premières et $d^2 x$ le vecteur des différentielles secondes des variables x par rapport aux du au point de fonctionnement courant (x_c, u_c)

En utilisant la relation $dg=0$ on a exprimé le vecteur dx en fonction du vecteur du .

La relation $d^2 g=0$ nous permet de calculer $d^2 x$ par l'expression (voir appendice 3)

$$d^2 x = - \left[\frac{dg}{dx} \right]^{-1} \cdot R$$

expression dans laquelle les composantes du vecteur R sont les constantes R_i intervenant dans le calcul de k_{match} .

Dans le cas simple où la fonction objectif $f(x, u)$ est linéaire, sa variation pour un coefficient k donné appliqué aux du s'écrit:

$$\Delta f(x, u) = \frac{df}{dx} \cdot \Delta x + \frac{df}{du} k du$$

En remplaçant Δx par sa valeur dans cette expression et en égalant à zéro sa dérivée en k , on trouve finalement

$$k_{opt} = \frac{\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{du} du}{\frac{df}{dx} \cdot \left[\frac{dg}{dx} \right]^{-1} \cdot R}$$

On note, que dans cette expression, le numérateur peut être interprété comme le gain linéaire attendu d'un déplacement proportionnel au gradient.

Le dénominateur vaut le vecteur R , proportionnel au vecteur d'erreur sur les bilans actif et réactif des équations $g=0$, évalué au coût marginal actif et réactif de la demande en chaque nœud (voir appendice 1).

Dans le cas général d'une fonction objectif quelconque mais convexe et différentiable, l'appendice 3 montre la formule générale valable pour le calcul de k_{opt} et démontre que ce coefficient doit nécessairement être positif autour de l'optimum.

Finalement dans l'OPF à l'étape N° 3 le k choisi sera

$$k = \text{Min}\{k_{viol}, k_{match}, k_{opt}\}$$

Calcul des facteurs d'échelle (p_j)

La définition des facteurs d'échelle trouve sa source dans l'analyse de l'évolution de la fonction f autour du point courant en fonction du choix des déplacements du .

Soit Δf l'accroissement de f pour un déplacement dans le domaine du réalisable défini par un déplacement des variables indépendantes du_j tel que $du_j = -G_j \cdot p_j \cdot k$

La formule de Taylor limitée au second ordre nous permet d'écrire:

$$\Delta f = k \cdot df + \frac{1}{2} k^2 \cdot d^2 f$$

et pour une valeur de $k = k_{opt}$ on a obtenu une valeur de Δf , soit Δf^* qui maximise la décroissance de la fonction de coût. On peut considérer Δf^* comme une fonction des variables p_j . Nous recherchons pour toutes les variables u_j non bloquées, les facteurs d'échelle $p_j > 0$ minimisant Δf^* . Soit r le nombre de variables bloquées.

Une condition nécessaire d'obtention de ce minimum est la nullité des dérivées de Δf^* par rapport aux p_j

$$\frac{d(\Delta f^*)}{dp_j} = 0$$

En principe ces (m-r) conditions fournissent un système linéaire de (m-r) équations à (m-r) inconnues dont la solution fournit les facteurs d'échelle recherchés. L'appendice 4 explicite ce système.

En pratique la matrice de ce système linéaire se construit à partir des Hessiens de la fonction f et des équations $g=0$. Elle est très creuse et son inversion est en principe tout à fait possible. Cependant, on lui a préféré une approche itérative beaucoup plus simple à mettre en œuvre.

Cette approche utilise le fait que $\frac{d(\Delta f^*)}{dp_j}=0$ est une relation linéaire dans les p_j

On part d'une valeur initiale pour les p_j et on calcule de façon numérique à chaque itération, successivement pour chaque p_j , la valeur de sa dérivée $\frac{d(\Delta f^*)}{dp_j}$ à droite et à gauche de sa

valeur courante. Ces deux dérivées permettent le calcul des deux coefficients de l'expression linéaire ainsi que la valeur à donner à p_j pour soit annuler la dérivée correspondante de Δf^* , soit amener à sa borne la variable p_j . Cette méthode très simple s'impose en sachant qu'une bonne approximation des facteurs d'échelle est très largement suffisante pour améliorer

grandement la convergence pourvu que les facteurs initiaux soient convenablement choisis.

Convergence et efficacité de l'algorithme

Cette section commente brièvement la convergence de l'algorithme OPF ainsi que sa capacité de paramétrer les résultats. Sur la rapidité de convergence, on discute les résultats obtenus sur un petit réseau test choisi pour son caractère didactique. (voir figure 3). Il s'agit d'une boucle totalement symétrique, liant deux plans de tensions (150 / 225) KV par deux transformateurs réglables et alimentée par deux générations de capacité active et réactive identique et de coût

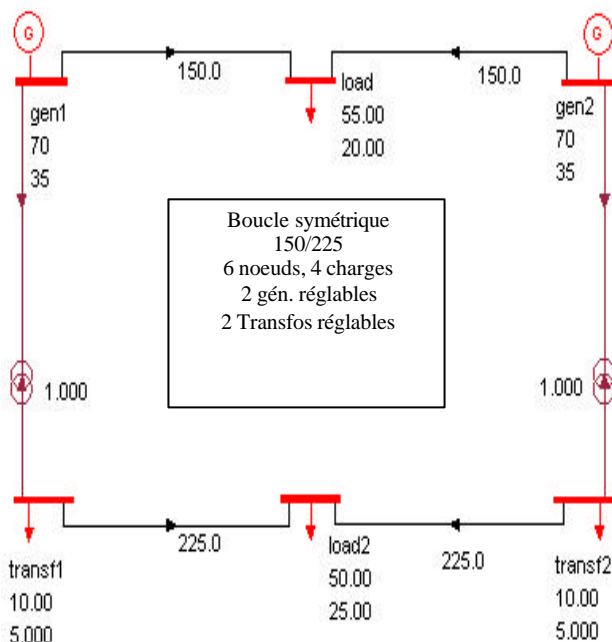


Figure 3

incluant un coefficient quadratique valant 1% du coefficient linéaire. La fonction objectif vise à minimiser les pertes.

La solution du système est évidemment symétrique. A l'optimum les deux générations actives et réactives ainsi que les deux rapports de transformation doivent être égaux, tandis que les quatre tensions aux bornes des transformateurs doivent se trouver à leurs limites supérieures. La solution de départ de l'OPF est fournie par le CLF.

Dans cette première solution, une des deux générations actives est à sa limite supérieure (70 MW), tandis que l'autre produit le complément. Les

Trace de la convergence (réseau symétrique 6 nœuds)

Iter	KViol	KMatch	Nb	KOpt	Exp.Gain	Cost
1	0,16219	B	0,27690	0	0,18020	-1,012190 205,15907
Base Change : gen1 (Q) by gen1 (V)						
2	0,08345	B	0,07362	2	0,21321	-0,262280 204,16277
3	0,00975	B	0,08034	0	0,26347	-0,240597 204,00401
Base Change : gen1 (V) by gen2 (V)						
4	0,14093	B	0,33837	2	0,15872	-0,083469 203,98649
Base Change : gen2 (V) by gen1 (Q)						
5	0,06375	B	0,15962	3	0,01658	-0,002395 203,90296
6	0,00745	B	0,03119	3	0,00223	-0,000711 203,89972
7	0,00533	B	0,03133	0	0,15851	-0,026970 203,89866
Base Change : transf1 (V) by gen1 - transf1 (r)						
8	0,00030	B	0,28876	0	0,00276	-0,000020 203,89688
Base Change : transf2 (V) by gen2 - transf2 (r)						
9	0,07341	B	0,59721	0	0,00006	-0,000001 203,89687
OPF OK : By theoretical relative constraint -						
Final Cost = 203,89687						
OPF did converge in 9 iterations						

Table 1

tensions et les rapports de transformation sont à leurs valeurs nominales.

L'algorithme OPF a besoin de 9 itérations pour atteindre l'optimum. La table 5 montre l'évolution de certaines de ses valeurs caractéristiques comme la source (minimum de k_{viol} , k_{match} ou k_{opt}) et la valeur de la quantité k donnant l'ampleur du déplacement et le gain espéré de celui.

On voit aussi les discontinuités dans l'évolution de la solution courante repérée par les changements de base ou l'atteinte d'une borne par une variable hors base. On remarque aussi dans la table sous la rubrique Nb, le nombre de composantes p_j (facteur d'échelle) qui ont été améliorés dans l'itération. Ces améliorations augmentent le temps de calcul mais par contre réduisent énormément le nombre d'itérations nécessaire dans une même base (généralement pas plus de deux ou trois). Il faut noter cependant, que le calcul des facteurs d'échelle ne visant qu'à les améliorer et non à les optimiser, le choix de leurs valeurs initiales a une grande importance sur le nombre d'itérations nécessaires.

Sur la question de la facilité de paramétrisation offerte par l'algorithme, il suffit de faire remarquer que la base et les valeurs optimales d'un problème sont des solutions de départ idéales pour un problème voisin dont une donnée a été modifiée marginalement. Dans ce cas l'OPF ne nécessite généralement qu'une ou deux itérations supplémentaires pour retrouver l'optimum. Ceci rend possible les études de fiabilité du type N-1 (simple incident sur le réseau ou la génération) ou le choix optimal d'un paramètre du réseau.

La figure 4 montre ainsi le résultat de la paramétrisation d'un banc de capacité installé au nœud "load2" dans le réseau didactique.

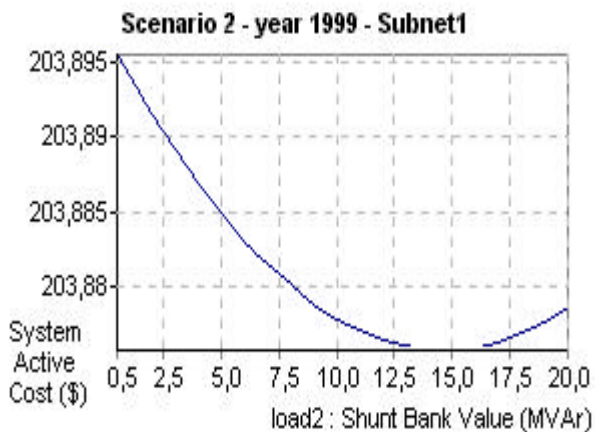


Figure 4

Utilisé sur de plus grands réseaux, l'algorithme présente des caractéristiques très semblables à celles exposées pour le réseau didactique. On peut résumer l'expérience acquise par les deux considérations suivantes:

- Le nombre de nœuds n'est pas vraiment la contrainte principale du problème. En effet les techniques actuelles permettent la factorisation de Jacobien correspondant à des réseaux de plusieurs centaines voire plusieurs milliers de nœuds.
- La contrainte principale du problème est le nombre de variables de contrôle, leurs points de départ, et la dimension de la plage de régulation où elles peuvent s'exercer. Ce sont en effet ces facteurs qui gouvernent le nombre de changement de base et de re-factorisation du Jacobien.

Résumé et conclusions

La méthode proposée est une méthode générale capable en principe de résoudre tous problèmes de Programmation non linéaire sous contraintes d'égalités ou d'inégalités. C'est une méthode appartenant à la filière GRG ou "gradient réduit et base variable".

Elle ne nécessite pas l'adjonction de termes de pénalités dans la fonction de coût pour la prise en compte des contraintes d'inégalités actives mais permet le traitement direct de ces contraintes par un changement adéquat du jeu des variables dépendantes et indépendantes lorsque ceci est rendu nécessaire par le déplacement de la solution courante. Ces déplacements, effectués dans le domaine des variations réalisables au premier ordre suivant la direction du gradient réduit sont sujets à une optimisation à deux niveaux.

Au premier niveau on optimise l'ampleur du déplacement pour des facteurs d'échelle donnés, appliqués aux variables indépendantes, au second niveau on améliore (optimise) ces facteurs d'échelle.

Le premier niveau d'optimisation garantit la continuité de l'appartenance de la solution au domaine du réalisable à une tolérance donnée ainsi qu'une décroissance monotone de la fonction de coût, tandis que le second niveau permet l'obtention entre deux changements de base, d'une convergence du type Newton.

L'un et l'autre de ces deux niveaux d'optimisation supposent le développement de la fonction de coût et des contraintes jusqu'au deuxième ordre et donc l'évaluation de formes quadratiques où interviennent les Hessiens de ces fonctions.

La méthode proposée évite cependant d'avoir à expliciter les Hessiens des contraintes. Les formes quadratiques les contenant sont efficacement évaluées par le calcul numérique de l'erreur à zéro entraînée par un petit déplacement réalisable au premier ordre.

Cette technique rend la méthode très simple à programmer et s'applique particulièrement bien au problème de l'écoulement des charges sous contraintes (CLF) et de l'optimisation des écoulements (OPF).

La méthode est particulièrement bien adaptée à l'étude de la sensibilité de la solution aux données du problème.

LISTE DE REFERENCES

- 1) J. Carpentier, "application of Newton method to load flow computations", Proc. PSCC 1 London ,1963
- 2) W.F. Tinney and C.E. Hart, "Power flow solution by Newton's Method", IIE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS – 86 , n° 11, November 1967.
- 3) H.W. Dommel and W.F. Tinney, "Optimal Power Flow Solutions", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS – 87, October, 1968.
- 4) J. Abadie and J. Carpentier, "Generalization of the Wolfe Reduced Gradient method to the case of non linear constraints" Revue "Optimisation" (pages 37 à 47), Academic Press, 1969
- 5) J. Carpentier, C. Cassapoglou and C. Hensgen, "Injections différentielles, une méthode de résolution générale des problèmes du dispatching économique sans variables entières utilisant le procédé du Gradient Réduit Généralisé. Proc. Symposium Helors-Ifors, Athens, 1968
- 6) J. Peschon, D.W. Bree and L.P. Haydu, "Optimal Solutions involving systems security", Proc. PICA, 1971.
- 7) E. Jamouille, J. Velghe, "Optimisation sous variables bornées de la répartition des puissances dans les réseaux maillés à courants alternatifs", Revue E, supplément au Bulletin de la Société Royale Belge des Electriciens, Vol. VI, n° 11, 1971.
- 8) J. Carpentier, "Optimal Power Flows", Electrical Power & Energy Systems, Vol. 1, n°1, April 1979.
- 9) A.M. Sasson, F. Vilorio, F. Ahaytes, "Optimal load flow solution using the Hessian matrix", Proc. PICA, 1971, pages 203 – 209.
- 10) A. Santos, S. Deckman, S. Soares, "A Dual Augmented Lagrangian Approach for Optimal Power Flow", IIE Transactions and Power Systems, Vol. 3, n°3, August 1988.
- 11) A. Monticelli, Wen-Hsiung E. Liu, "Adaptive Movement Penalty Method for the Optimal Power Flow" IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol 7, n°1, February 1992
- 12) J.L. Carpentier, A. Gillon, Y. Jegouzo, "Multimethod Optimal Power Flows at Electricité De France" IFAC Seoul 1989
- 13) R.C. Burchett, H.H Happ, D.R. Vierath, "Quadratically convergent optimal power flow", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, PAS-103, November 1984.
- 14) de La Vallée Poussin, "Cours d'Analyse Infinitésimale", Louvain Uystpruyst éditeur, Paris Gauthier-Villars éditeur, 1943

15) D. P. Bertsekas, "non Linear Programming" Athena Scientific, 1999

Appendice 1

Gradient réduit et direction de la recherche

Calcul du "gradient réduit" au point courant

Soit la fonction $f(x,u)$ soumise à l'ensemble de $2n$ contraintes représentées par le système de $2n$ équations $g(x,u) = 0$.

On désire calculer les composantes du vecteur $G = df/du$ ou gradient réduit de la fonction $f(x,u)$ par rapport à chaque variable indépendante u_j ($j = 1 \dots m$). On montre (Ref.14) que, sous la condition que le Jacobien correspondant dans $g(x,u)$ au jeu de variables x soit inversible, les $2n$ variables x_i peuvent être considérées comme fonctions implicites différentiables des variables u .

On applique alors les règles de différentiation des fonctions implicites et on obtient en différentiant totalement la fonction $f(x,u)$ ainsi que les équations $g(x,u) = 0$ par rapport aux composantes u_j , les deux expressions matricielles:

$$\begin{aligned}df &= \nabla_x^T f \, dx + \nabla_u^T f \, du \\ dg &= \nabla_x^T g \, dx + \nabla_u^T g \, du = 0\end{aligned}$$

expressions dans lesquelles:

- les symboles $\nabla_x^T f$ et $\nabla_u^T f$ représentent le transposé des vecteurs des dérivées partielles premières de la fonction f par rapport aux variables x et u . Soit, les vecteurs $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{du}$.
- les symboles $\nabla_x^T g$ et $\nabla_u^T g$ représentent les matrices des dérivées partielles premières du système de contraintes g par rapport aux variables x et u . Soit, les matrices $\frac{dg}{dx}$ et $\frac{dg}{du}$.

A noter que $\frac{dg}{dx}$ est un Jacobien du système g .

L'élimination du vecteur dx entre ces deux expressions permet le calcul du vecteur G ou gradient réduit dont la composante df/du_j s'écrit:

$$\frac{df}{du_j} = \frac{df}{du_j} - \frac{df}{dx} \cdot \left[\frac{dg}{dx} \right]^{-1} \cdot \left[\frac{dg}{du_j} \right] = G_j$$

On remarque que si on choisit un déplacement $du_j = -G_j$ la différentielle première df s'écrit

$$df = -\sum_j G_j^2 \text{ et est toujours négative}$$

Problème linéarisé au point courant

A ce stade il est intéressant de remarquer que les composantes G_j du gradient réduit peuvent aussi être interprétées comme les critères simplex du problème linéarisé au point courant.

Dans la terminologie de la programmation linéaire, les variables dépendantes sont alors appelées basiques et les indépendantes hors base. Le Jacobien ou base courante du système est noté B et la sous-matrice des variables indépendantes $\nabla_U^T g$ est notée H .

De même, les vecteurs $\frac{df}{du}$ et $\frac{df}{dx}$ sont représentés par les vecteurs Cu et Cx.

Sous ces notations, les critères simplex s'écrivent.

$$\frac{df}{du_j} = C_u - C_x B^{-1} H_j$$

Expression dans laquelle

$$\frac{df}{dx} \cdot \left[\frac{dg}{dx} \right]^{-1} = C_x B^{-1}$$

sont les variables duales des contraintes $g=0$ ou les multiplicateurs de Lagrange λ changés de signe. Dans notre problème particulier on les interprète comme les coûts marginaux de l'énergie active et réactive aux nœuds du réseau.

$$\left[\frac{dg}{dx} \right]^{-1} \cdot \left[\frac{dg}{du_j} \right] = B^{-1} H_j$$

est le vecteur colonne dont les composantes valent $-\frac{dx_i}{du_j} = s_{ij}$ qui sont les termes correspondant à la variable u_j de la matrice de sensibilité S du système linéarisé au point courant

Déplacement réalisable au premier ordre

Sous ces notations simplifiées, la différentielle totale $dg = 0$, s'écrit

$$B dx + H du = 0$$

ce qui conduit à obtenir le vecteur dx en fonction du vecteur du par l'expression

$$dx = - B^{-1} H du = S du$$

On définit finalement $dy = k \underline{S} du$, expression dans laquelle \underline{S} de dimension $(2n,m)$ vaut la matrice de sensibilité S bordée supérieurement d'une matrice unitaire I.

On note que dy est un vecteur satisfaisant à la condition $dg = 0$ et donc appartient à l'espace des variations réalisables au premier ordre, autour du point courant.

Le vecteur $dy = k \begin{pmatrix} du \\ dx \end{pmatrix}$ donne une direction de recherche appartenant au domaine du réalisable.

Appendice 2

Mismatch Evaluation

We write the second order Taylor serie expansion of the vector valued function $g(x, u)$ around the current operating point (x_c, u_c) for a small displacement dy belonging to the subspace of first order feasible variations:

$$g(x_c + kdx, u_c + kdu) = g(x_c, u_c) + k \nabla_x^T g dx + k \nabla_u^T g du + \frac{1}{2} k^2 R$$

In this expression R is a column vector of which the component

$R_i = (dy)^T \nabla^2 g_i (dy)$ is a quadratic form where $\nabla^2 g_i = \frac{d^2 g_i}{dx du}$ stands for the Hessian matrix of the i th constraint $g_i = 0$

The point (x_c, u_c) is by definition a feasible solution of the system, therefore $g(x_c, u_c) = 0$

The vectors dx and du belong to the subspace of first order feasible variations, therefore

$$k \nabla_x^T g dx + k \nabla_u^T g du = 0$$

By defining the mismatch vector MM of which the component MM_i is the difference from 0 of $g_i(x + kdx, u + kdu)$, we can write :

$$MM = \frac{1}{2} k^2 (dy)^T \nabla^2 g (dy) = \frac{1}{2} k^2 R$$

where R is a $(1, 2n)$ vector depending of the search direction dy , but independent of k .

Appendice 3

Evaluation de d^2f et Df

Soit $\Delta f = kdf + \frac{1}{2}k^2.d^2f$ l'évolution de la fonction objectif f , autour de la solution courante (x_c, u_c) , pour un vecteur de déplacement $dy = k \begin{pmatrix} du \\ dx \end{pmatrix}$ appartenant à l'espace des variations

réalisables au premier ordre. Dans cette expression, d^2f que nous désirons calculer, prend en compte l'évolution non linéaire des fonctions f et g .

Comme dans l'appendice 1, nous appliquons les règles de différentiation des fonctions implicites en différentiant deux fois les équations $g = 0$ et ensuite la fonction f (voir Ref 10 Chap.4), on trouve:

$$d^2g = (dy)^T \nabla^2 g (dy) + \nabla_x^T g d^2x = R + \nabla_x^T g d^2x = 0$$

$$d^2f = (dy)^T \nabla^2 f (dy) + \nabla_x^T f . d^2x$$

Le premier système d'équations nous permet de calculer le vecteur $d^2x = -(\nabla_x^T g)^{-1} R$, expression dans laquelle le vecteur R est celui introduit en appendice 2. Ensuite en remplaçant d^2x par sa valeur dans la seconde expression on trouve d^2f .

Finalement

$$\Delta f = kdf + \frac{1}{2}k^2 ((dy)^T \nabla^2 f (dy) - \nabla_x^T f (\nabla_x^T g)^{-1} R).$$

que nous notons plus simplement $\Delta f = kA + \frac{1}{2}k^2 (B-C)$ en introduisant les quantités A , B , et C

En dérivant cette expression par rapport à k pour trouver le k optimal minimisant Δf on trouve $k_{opt} = -A / (B-C)$

Le numérateur A de l'expression de k_{opt} est nécessairement négatif car le déplacement du est choisi par hypothèse en sens inverse du gradient (voir appendice 1).

Montrons que le dénominateur $(B-C)$ est nécessairement positif autour de l'optimum.

L'appendice 1 a montré que le vecteur $\nabla_x^T f (\nabla_x^T g)^{-1}$ nous donne les coûts marginaux des contraintes ou les multiplicateurs de Lagrange λ_i changés de signe.

En introduisant ces multiplicateurs et en remplaçant R par la forme quadratique qu'il

symbolise, le dénominateur s'écrit $dy^T (\nabla^2 f + \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i \nabla^2 g_i) dy$

expression qui selon les conditions d'optimum de Lagrange (voir Ref 10) est nécessairement ≥ 0 à l'optimum.

Il est aussi intéressant de noter que remplaçant k_{opt} par sa valeur dans l'expression

$$\Delta f^* = k_{opt} . A + \frac{1}{2} k_{opt}^2 . (B-C) \text{ on obtient}$$

$$\Delta f^* = - \frac{1}{2} \frac{A^2}{(B-C)} \text{ expression nécessairement inférieure à zéro. Cette expression garantit la}$$

décroissance monotone de f et donc la convergence de l'algorithme.

Appendice 4

Calcul des facteurs d'échelle

Soit Δf^* l'accroissement de la fonction f correspondant à un déplacement des variables indépendantes $du_j = -G_j \cdot p_j \cdot kopt$, expression dans laquelle G_j est la composante j du gradient réduit G et p_j le facteur d'échelle à appliquer à cette composante

On peut écrire $\Delta f^* = kopt \cdot df + \frac{1}{2} kopt^2 \cdot d^2f$

Nous cherchons à expliciter les conditions $\frac{d(\Delta f^*)}{dp_j} = 0$ ou ce qui revient au même $\frac{d(\Delta f^*)}{d(du_j)} = 0$

pour toutes les variables $du_j \neq 0$, donc non bloquées à une de leurs limites.

La dérivée de df (voir appendice 1) par rapport à du_j vaut G_j

L'expression de la différentielle seconde d^2f (voir appendice 3) s'écrit

$$dy^T (\nabla^2 f + \sum_{i=1}^{2n} I_i \nabla^2 g_i) dy$$

Les variations dy appartenant au domaine réalisable, on peut les exprimer en fonction des du uniquement (voir appendice 1) par l'expression $dy = \underline{S} \cdot du$

En introduisant cette expression dans d^2f on a

$$d^2f = du^T \cdot \underline{S}^T (\nabla^2 f + \sum_{i=1}^{2n} I_i \nabla^2 g_i) \underline{S} \cdot du$$

La dérivée de cette expression par rapport à du s'écrit

$$2 \cdot \underline{S}^T (\nabla^2 f + \sum_{i=1}^{2n} I_i \nabla^2 g_i) \underline{S} \cdot du$$

Finalement les conditions $\frac{d(\Delta f^*)}{d(du)} = 0$ fournissent la relation matricielle :

$$\frac{d(\Delta f^*)}{d(du)} = G + kopt \cdot \underline{S}^T (\nabla^2 f + \sum_{i=1}^{2n} I_i \nabla^2 g_i) \underline{S} \cdot du = 0$$

notée par simplicité $M \cdot du = -G$

En principe l'inversion de la matrice carrée M de dimension $(m-r)$ avec r le nombre de variables du_j bloquées et $(m-r)$ le nombre de variables du_j non bloquées ou $\neq 0$, permet de trouver le vecteur du^*

$$du^* = -M^{-1} \cdot G \quad \text{et ensuite les facteurs d'échelle optimaux} \quad p_j^* = \frac{du_j^*}{G_j}$$

Il est intéressant de remarquer la totale similitude de cette approche avec la méthode d'optimisation de Newton. On retrouve d'ailleurs telle quelle cette méthode dans le cas de l'optimisation sans contraintes où le système d'équations $g=0$ disparaît.